1. CAPÍTULO 3 – RETAS E PLANOS

1.1. Implicação e Condições Necessárias e Suficientes

· Alguns teoremas podem ser enunciados utilizando a expressão **se… então…** que traduz uma **implicação** (operação lógica) cujo símbolo é **⇒.**

Exemplo:

- Se *H* então *T* ou *H* ⇒ *T* (a hipótese implica a tese)

· Numa implicação *H* ⇒ *T*, *H* é o **antecedente** e *T* é o **consequente**.

· Considera a seguinte frase:

Se estou em Lisboa (**p**) então estou em Portugal. (**t**)

· Diz se que: ***p*** é a **condição suficiente** para se verificar ***t***, ou seja, estar em Lisboa é suficiente para se saber que se está em Portugal.

· No entanto, estar em Portugal é uma **condição necessária**, mas não suficiente, pois mesmo que se esteja em Portugal não significa que estamos em Lisboa.

· Em relação ao **paralelismo** entre planos:

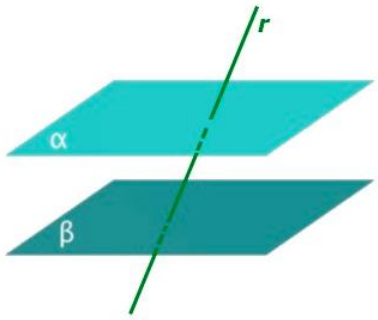
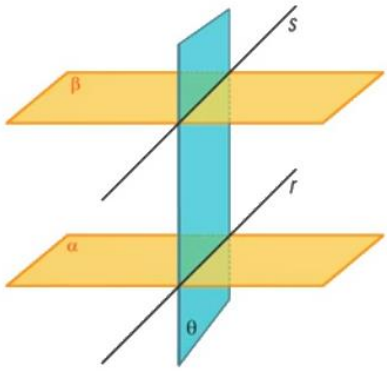
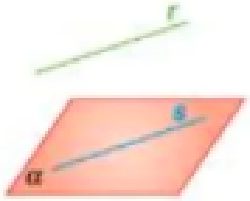
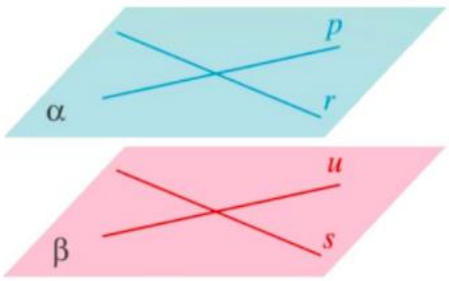
É condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos que num dos planos existam duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do outro plano.

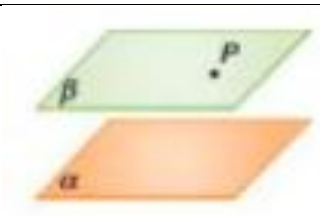
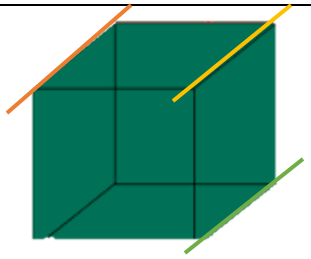
· Em relação à perpendicularidade entre planos:

É condição necessária e suficiente para que dois planos sejam perpendiculares que um deles contenha uma reta perpendicular ao outro.

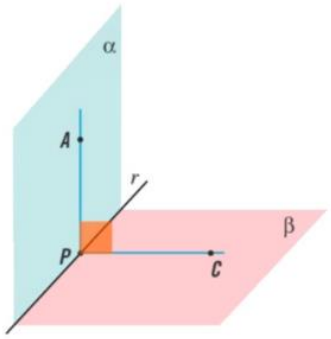
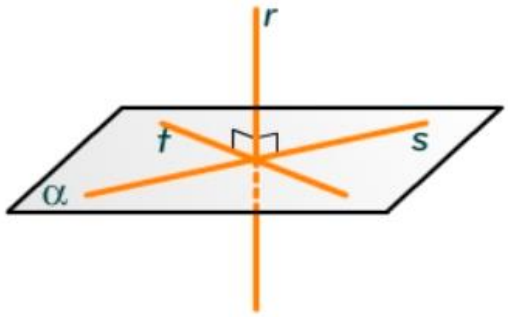
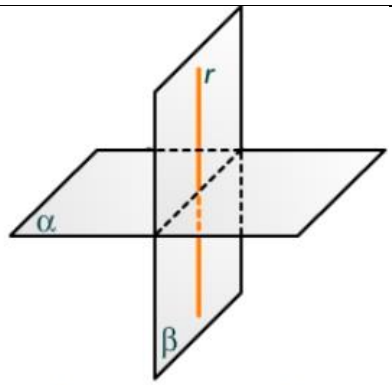
1.2. Paralelismo

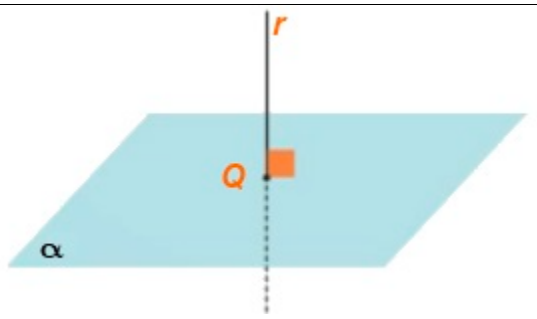
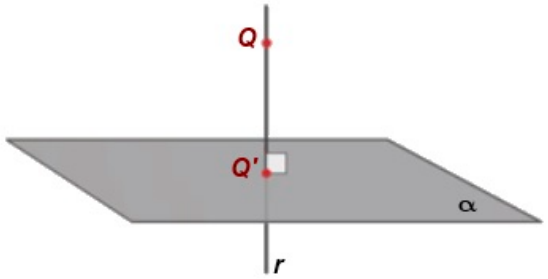
.

Se uma reta é secante a um de dois planos paralelos, então é também secante ao outro.	 $\alpha//\beta$ e r interseta $\alpha \Rightarrow r$ interseta β
Se um plano θ é concorrente com um de dois planos paralelos, então também é concorrente com o outro. As retas de interseção do plano θ com os planos α e β são paralelas.	 $\alpha//\beta$ e θ é concorrente com $\alpha \Rightarrow \theta$ é concorrente com β e $r//s$
Se uma reta r é paralela a um plano α, então existe no plano α uma reta paralela à reta r. Se num plano existe uma reta paralela a uma reta dada, então a reta e o plano são paralelos.	
Dois planos α e β são paralelos se existirem em α duas retas concorrentes, r e p, e em β duas retas concorrentes, s e u, paralelas a r e a p.	 $r//s$ e $p//u \Rightarrow \alpha//\beta$

Se α é paralelo a um de dois planos paralelos, então também é paralelo ao outro plano.	$\alpha//\beta$ e $\beta//\theta \Rightarrow \alpha//\theta$
Por um ponto exterior a um plano passa um único plano paralelo ao primeiro.	
Duas retas paralelas a uma terceira (as três não são necessariamente complanares) são paralelas entre si.	

1.3. Perpendicularidade

Os planos-suporte de dois semiplanos perpendiculares são perpendiculares.	 $C\hat{P}A = 90°$, logo $\alpha \perp \beta$
- Se uma reta *r* é perpendicular a duas retas *s* e *t* num mesmo ponto *P*, então é igualmente perpendicular a todas as retas complanares a *s* e *t* que passam por *P* e qualquer reta perpendicular a *r* que passa por *P* está contida no plano determinado pelas retas *s* e *t*. - Se uma reta é perpendicular a um plano, então é perpendicular a um par de retas concorrentes desse plano, e vice-versa.	 $r \perp s$ e $r \perp t$, s e t retas concorrentes de $\alpha \Rightarrow r \perp \alpha$
Se dois planos são perpendiculares, um deles contém uma reta perpendicular ao outro. Se num plano existe uma reta perpendicular a outro plano, os dois planos são perpendiculares.	 $r \subset \beta$ e $r \perp \alpha \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$

Por um ponto exterior a um plano passa uma única reta perpendicular a esse plano.	
Seja *r* a reta que passa no ponto P e é perpendicular ao plano α. Ao ponto P', interseção da reta r com o plano α, chama-se projeção ortogonal de P sobre o plano α.	

2. CAPÍTULO 4 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

- Chama-se **equação do 2.º grau** com uma incógnita a qualquer equação equivalente a:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

- Quando os termos do primeiro membro de uma equação do 2.º grau estão ordenados do grau maior (grau dois) ao grau menor e o segundo membro é igual a zero, dizemos que a equação está na sua **forma canónica**.
- *Exemplos:*

  Seguidamente, reduzem-se à forma canónica duas equações do 2.º grau utilizando os princípios de equivalência.

a) $x^2 - x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

b) $(x-1)(x+1) = 4x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$

· Há equações em que os coeficientes do termo em *x* ou o termo independente (ou ambos) são **zero**. A estas equações do 2.º grau – que não apresentam termo em *x* ou termo independente (ou ambos) – dá-se o nome de **equações incompletas**. Às restantes equações – que apresentam todos os termos – chamamos **equações completas**.

Coeficientes			Equação	Termos nulos	Tipo de equação ($a \neq 0$)
a	b	c			
1	18	-19	$x^2 + 18x - 19 = 0$	nenhum	$ax^2 + bx + c = 0$ completa
5	0	0	$5x^2 = 0$	termo em x; termo independente	$ax^2 = 0$ incompleta
1	-5	0	$x^2 - 5x = 0$	termo independente	$ax^2 + bx = 0$ incompleta
3	0	12	$3x^2 + 12 = 0$	termo em x	$ax^2 + c = 0$ incompleta

· As equações incompletas do 2.º grau podem ser resolvidas, por exemplo, recorrendo **à lei do anulamento do produto,** aos **casos notáveis** da multiplicação de binómios, ao **cálculo direto de raízes quadradas** ou ainda, através da **fórmula resolvente**.

2.1. Lei do Anulamento do Produto

· Um produto de números reais é nulo quando, e apenas quando, pelo menos um dos fatores é nulo.

$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0$

Resolve cada uma das equações seguintes, apresentando o seu conjunto-solução.

23.1. $(3x-1)\left(\frac{1}{2}x-1\right)=0$

23.2. $x(2x-3)\left(x-\frac{5}{2}\right)=0$

Proposta de resolução

23.1. $(3x-1)\left(\frac{1}{2}x-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-1=0 \vee \frac{1}{2}x-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=1 \vee x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \vee x=2$

$S=\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$

23.2. $x(2x-3)\left(x-\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee 2x-3=0 \vee x-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3}{2} \vee x=\frac{5}{2}$

$S=\left\{0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

2.2. Casos Notáveis

· Existem dois casos notáveis:

(A-B) (A+B) = $A^2 - B^2$ (diferença de quadrados)
(A+B) = $A^2 + 2AB + B^2$ **(quadrado de um binómio)**

1.

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$ O primeiro membro da equação é o desenvolvimento do quadrado de um binómio.

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$ Aplica-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow x-2 = 0 \ \vee \ x-2 = 0 \Leftrightarrow$ Repara que ambas as equações têm a mesma solução.

$\Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow$ Depois resolve-se esta equação do 1.º grau.

$\Leftrightarrow x = 2$ Completa-se a resolução.

2.

$\frac{x^2}{2} = -4(x+2) \Leftrightarrow$ Nas equações com parênteses devemos começar por retirá-los.

$\Leftrightarrow x^2 = -8x - 16 \Leftrightarrow$ Em seguida, eliminam-se os denominadores.

$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow$ O passo seguinte é apresentar a equação na sua forma canónica.

$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow$ Neste caso, verifica-se que o primeiro membro é igual a $(x+4)^2$.

$\Leftrightarrow (x+4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow$ Agora, aplica-se a lei do anulamento do produto e encontra-se a solução final.

$\Leftrightarrow x+4 = 0 \ \vee \ x+4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -4$

$\therefore S = \{-4\}$

2.3. Cálculo Direto de Raízes Quadradas

3. $(x+3)^2 = 7$

Neste caso, a equação pode ser resolvida de forma análoga às equações do tipo $x^2 = c$.

Só que, em vez de $x^2 = c$, tem-se $(x+b)^2 = c$, que se pode resolver do seguinte modo:

$$x + b = \sqrt{c} \ \vee \ x + b = -\sqrt{c} \Leftrightarrow x = -b + \sqrt{c} \ \vee \ x = -b - \sqrt{c}$$

Assim sendo,

$$(x+3)^2 = 7 \Leftrightarrow x + 3 = \sqrt{7} \ \vee \ x + 3 = -\sqrt{7} \Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{7} \ \vee \ x = -3 - \sqrt{7}$$

$$\therefore S = \{-3 + \sqrt{7}, -3 - \sqrt{7}\}$$

2.4. Fórmula Resolvente

· Onde a, b e c são os coeficientes dos termos da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ a \neq 0$$

Considera a equação $x^2 + 3x - 70 = 0$ e observa a sua resolução:

$$x^2 + 3x - 70 = 0 \Leftrightarrow \quad (a = 1,\ b = 3,\ c = -70)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-70)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 17}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 17}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14}{2} \ \vee \ x = -\frac{20}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \ \vee \ x = -10$$

***2.2.1. Completar o Quadrado**

· Para obter uma expressão algébrica igual a uma expressão do tipo $x^2 + px + q$, basta adicionar a subtrair $(\frac{p}{2})^2$, ou seja, o quadrado de metade do coeficiente de *x*.

$x^2 + px + q \longrightarrow (x + ?)^2 + !$

$\downarrow$

adicionar e subtrair $(\frac{p}{2})^2$

Exemplo:

$$x^2 + \underbrace{3x}_{2\times\frac{3}{2}} + 10 = x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10$$

$$= \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 10$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{40}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$$

2.5. Problemas de Equações do 2º Grau

· Como resolver um problema (de 2.º grau)?

1.º Ler o enunciado com muita atenção, apontando todos os dados, bem como tudo aquilo que é pedido. Fazer um esquema ou a representação geométrica dos dados pode ajudar.

2.º Indicar o que representa a incógnita.

3.º Encontrar a equação correspondente.

4.º Resolver a equação.

5.º Verificar se as soluções da equação fazem sentido no contexto do problema(nem todas as soluções da equação são soluções do problema).